

UMA CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DA INTERAÇÃO CORRENTE-ONDA PROGRESSIVA

Dulce Cardoso Washington

ABSTRACT

A mathematical model to evaluate the resultant interaction of a progressive wave, incident to a uniform current is presented and its effects analysed. The model is based on the potential theory which assumes small amplitude waves, so that the potential velocity can be treated as the addition of the several elementary potentials. For the description of the interaction of motion between waves and current Green's function technique is utilized. The solution of the problem is achieved by applying the boundary conditions on the vortex surface. An algorithm is carried out to show the form of the surface in the internal and external regions of the current, and for numerically evaluation of the model.

INTRODUÇÃO

As ondas oceânicas ao se propagarem afastando-se da região onde são formadas sofrem modificações acentuadas a medida que se deparam com alguns obstáculos. As principais alterações se apresentam através da variação da amplitude e da mudança de direção principal de propagação das ondas.

No caso particular de uma frente de onda que, ao se propagar encontra uma corrente marítima pode-se verificar esses efeitos. Tal comportamento também é encontrado no caso de navios se deslocando no mar, quando a esteira interfere com sistemas de ondas do mar ou com o sistema formado pelo próprio navio.

As duas grandes dificuldades presentes neste tipo de problema se devem à presença de termos não lineares nas condições de contorno a serem satisfeitas na superfície livre e a forma de representação matemática da interface dos dois escoamentos, corrente-onda.

Gadd (1969) estudou o comportamento das ondas geradas por navios e observou que estas ondas apresentaram deformações bastante significativas quando encontravam a esteira viscosa.

No lado experimental Savitsky (1970) estudou as interações de onda e turbulência e verificou que as correntes de pequenas

intensidades produziam um efeito muito maior na onda incidente do que a perturbação provocada pela turbulência.

Maruo e Hayasaki (1972) estudaram os efeitos da esteira em ondas geradas por navios. Para tal utilizaram um modelo representativo da mesma e, neste modelo, supuseram a esteira concentrada numa região limitada por duas placas planas paralelas. Neste trabalho Maruo e Hayasaki apresentaram resultados de sua avaliação numérica.

Hirata (1973) estudou a interferência de ondas geradas por navios utilizando-se de uma modelização em que a esteira era suposta concentrada numa região cilíndrica com eixo horizontal e seção circular. Sobre este escoamento no interior do cilindro fez incidir uma onda.

Em 1975, Evans, através de expansões de autofunções solucionou o problema de ondas planas em superfícies de vértices. Neste trabalho Evans evidenciou uma incorreção na formulação de Maruo e Hayasaki (1972) que se deu na condição de contorno a ser satisfeita na fronteira da esteira, sendo que, posteriormente, Maruo e Matsuura (1976) corrigiram o equívoco.

Nosso objetivo é estudar o problema da interação entre os escoamentos devido a uma onda progressiva e uma corrente uniforme tentando-se avaliar numericamente o escoamento resultante desta interação.

## FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

### GENERALIDADES

Para o estudo do problema admite-se que o fluido é ideal incompressível e o escoamento irrotacional. Estas hipóteses fazem com que o problema matemático recaia num problema de determinação de um potencial de velocidade para descrever o escoamento.

Além destas é feita uma hipótese adicional onde assume-se que as ondas são de pequenas amplitudes desprezando, portanto, termos não lineares presentes no equacionamento matemático.

O modelo, baseado na teoria potencial, consiste na representação do escoamento através de um potencial de velocidade que, devido a linearização, é a superposição de um potencial representativo do escoamento uniforme na região interna (região II), região da corrente, de um potencial representando as ondas progressivas que se propagam na região externa (região I) e de um potencial que levará em conta a interação destes dois escoamentos. Para descrever o poten-

cial devido a interação destes escoamentos que dão origem a uma superfície de vórtices, é utilizada uma distribuição de singularidades, função de Green.

As ondas incidentes ao se depararem com a superfície de vórtices sofrem reflexão e transmissão através da região interna. As ondas refletidas possuem comprimento de onda igual ao das ondas incidentes, o que não ocorre necessariamente com as ondas transmitidas.

#### GEOMETRIA E HIPÓTESES

A orientação do sistema de coordenadas é exposta na figura I, onde pode-se ver que o plano  $x, y$  coincide com a superfície das águas em estado de repouso, portanto uma superfície horizontal sendo o eixo  $oz$  orientado verticalmente para cima.

O fluido é suposto incompressível ( $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ ) e não viscoso em toda região fluída. O escoamento é admitido ser irrotacional ( $\nabla \times \vec{V} = 0$ ) possibilitando o uso da Teoria Potencial. A superfície de vórtices que separa a corrente da região fluída externa é definida por:

$$F(x, r, \theta; t) = r - r_0(x, \theta; t) = 0 \quad (\text{II.1})$$

O potencial de velocidade  $\phi_I$ , na região externa à corrente, é descrito pelo potencial de onda incidente e pelo potencial de difração que é expresso pela superposição dos potenciais de fonte, dipolo e potenciais livres de onda. Este potencial é representado na forma:

$$\phi_I(x, y, z, t) = \phi_1(x, y, z, t) \quad (\text{II.2})$$

O potencial de velocidade na região interna à corrente,  $\phi_{II}$ , é composto do potencial de ondas transmitidas mais os potenciais livres de onda que caracterizam os efeitos locais e assume a forma:

$$\phi_{II}(x, y, z, t) = Ux + \phi_2(x, y, z, t) \quad (\text{II.3})$$

A forma da superfície resultante da interação dos escoamentos, externo e interno, é dada por:

$$F_I(x, y, z, t) = z - \zeta_I(x, y, t) = 0 \text{ na região I} \quad (\text{II.4})$$

$$F_{II}(x, y, z, t) = z - \zeta_{II}(x, y, t) = 0 \text{ na região II} \quad (\text{II.5})$$

Assumida a hipótese de irrotacionalidade do fluido pode-se dizer que a equação da continuidade é representada pela Equação de Laplace nas duas regiões em estudo, sendo que a solução da Equação de Laplace fornece meios para calcular o campo de velocidade e a trajetória das partículas.

Com uma visão da geometria e hipóteses que limitam o problema estuda-se as condições de contorno a serem satisfeitas.

### CONDIÇÕES DE CONTORNO

Uma vez que as ondas incidentes têm a dependência do tempo expressa na forma  $e^{it}$ , pode-se dizer, que, para todos os potenciais decorrentes, a dependência do tempo tem a mesma forma. Assim, escreve-se o potencial de velocidade na região I, como sendo:

$$\phi_I(x, y, z, t) = e^{i\omega t} \phi'_I(x, y, z) \quad (\text{II.6})$$

Duas condições devem ser satisfeitas na superfície livre: (a) cinemática; (b) dinâmica.

#### a) Condição Cinemática na Superfície Livre

$$\frac{DF_I}{Dt} = 0 \quad (\text{II.7})$$

Esta condição exprime o fato que a partícula fluída permanece na superfície livre.

Considerando que  $F_I(x, y, z; t) = z - \zeta_I(x, y; t) = 0$ , teremos:

$$0 = \frac{DF_I}{Dt} = \frac{\partial F_I}{\partial t} + \frac{\partial F_I}{\partial x} \frac{\partial \phi_I}{\partial x} + \frac{\partial F_I}{\partial y} \frac{\partial \phi_I}{\partial y} + \frac{\partial F_I}{\partial z} \frac{\partial \phi_I}{\partial z}$$

ou

$$-\zeta_{It} - \phi_{Ix} \zeta_{Ix} - \phi_{Iy} \zeta_{Iy} = 0 \text{ em } z = \zeta_I \quad (\text{II.8})$$

#### b) Condição Dinâmica na Superfície Livre

Como a pressão no fluído é expressa pela equação de Bernoulli, sendo constante a pressão à superfície e admitindo esta constante igual a zero, tem-se:

$$g\zeta_I + \phi_{It} + \frac{1}{2} [\phi_{Ix}^2 + \phi_{Iy}^2 + \phi_{Iz}^2] = 0 \text{ em } z = \zeta_I \quad (\text{II.9})$$

Uma vez que a condição dinâmica na superfície livre não é linear é necessário linearizá-la.

Utilizando o método de comparação verifica-se que os termos quadráticos são desprezíveis em relação aos termos lineares retidos. Desta forma, expandindo  $\phi_I(x, y, z, t)$  e  $\zeta_I(x, y, z, t)$  em séries de potências e, tomando os termos líderes da primeira aproximação, ou seja, linearizando:

$$\phi_{Iz} - \zeta_{It} = 0 \text{ em } z = 0 \quad (\text{II.10})$$

$$g\zeta_I + \phi_{It} = 0 \text{ em } z = 0 \quad (\text{II.11})$$

Como foi dito anteriormente, o potencial de velocidade na região I é representado por  $\phi_I(x, y, z, t) = e^{i\omega t} \phi'_I(x, y, z, t)$  ou:

$$\phi_I(x, y, z, t) = T(t) \phi'_1(x, y, z) \quad (\text{II.12})$$

Sendo assim a equação (II.12) é escrita na forma:

$$\phi'_{1z} - \frac{\omega^2}{g} \phi'_1 = 0 \quad (\text{II.13})$$

onde  $v_1$  é o número de onda,  $\omega$  é a frequência e  $g$  é a gravidade.

Fazendo-se  $\omega^2/g = v_1$  tem-se:

$$\phi'_{1z} - v_1 \phi'_1 = 0 \text{ em } z = 0 \quad (\text{II.14})$$

Que representa a condição de contorno a ser satisfeita na superfície livre em sua forma linearizada. Superfície esta que é obtida através da equação (II.11).

$$\zeta_I(x, y, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi_I}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad (\text{II.15})$$

Desenvolvendo procedimento análogo à região I, e considerando que:

$$F_{II}(x, y, z, t) = z - \zeta_{II}(x, y, t)$$

$$\phi_{II}(x, y, z, t) = -Ux + \phi_2(x, y, z, t)$$

estabelece-se para a região II:

a) Condição Cinemática na Superfície

$$\frac{DF_{II}}{Dt} = 0 \text{ em } z = \zeta_{II}$$

ou

$$U \frac{\partial \zeta_{II}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{II}}{\partial t} - \frac{\partial \zeta_{II}}{\partial t} = 0 \text{ em } z = \zeta_{II} \quad (\text{II.16})$$

b) Condição Dinâmica na Superfície

Utilizando, novamente, a equação de Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2} [U^2 - 2U\phi_{IIx} + \phi_{IIx}^2 + \phi_{IIy}^2 + \phi_{IIz}^2] = \frac{U^2}{2}$$

O valor dado à constante do lado direito,  $v^2/2$ , é devido ao fato que a superfície de vórtices não pode suportar uma diferença de pressão.

Assim sendo, a condição dinâmica se apresenta na forma:

$$g\zeta_{II} + \frac{\partial \phi_{II}}{\partial t} - U \frac{\partial \phi_{II}}{\partial x} = 0 \text{ em } z = \zeta_{II} \quad (\text{II.17})$$

Através de um tratamento matemático no qual é utilizado a separação de variáveis, o que nos permite escrever  $\phi_2(x, y, z, t) = e^{i(\omega t - \ell x)} \Sigma \phi'_{2u}(x, z)$ , pode-se expressar de forma mais adequada as condições na superfície livre nesta região, qual seja:

$$\phi'_{2z} - \frac{(\omega + u\ell)}{g} \phi'_2 = 0 \quad (\text{II.18})$$

ou

$$\phi'_{2z} - v_2 \phi'_2 = 0 \text{ em } z = 0 \quad (\text{II.19})$$

onde  $v_2 = \frac{(\omega+u1)^2}{g}$ , o número de onda e  $1$  o número de onda aparente.

Através da equação (II.17) chega-se à forma da superfície livre na região II.

$$\zeta_{II}(x,y,t) = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_{II} \Big|_{z=0} \quad (II.20)$$

Sobre a superfície de vórtices condições de contorno devem ser satisfeitas. A condição de que a componente normal da velocidade deve ser igual nos dois lados desta superfície é o suporte da condição cinemática e a condição dinâmica expressa o fato de que a folha de singularidades não pode suportar diferença de pressão.

Condição Cinemática

Região I

$$\frac{DF}{Dt} = -\frac{\partial r_0}{\partial t} - \left( \frac{\partial \phi_{II}}{\partial x} - U \right) \frac{\partial r_0}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{II}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_{II}}{\partial \theta} \frac{\partial r_0}{\partial \theta} = 0 \quad (II.21)$$

Região II

$$\frac{DF}{Dt} = -\frac{\partial r_0}{\partial t} - \frac{\partial \phi_I}{\partial x} \frac{\partial r_0}{\partial x} + \frac{\partial \phi_I}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_I}{\partial \theta} \frac{\partial r_0}{\partial \theta} = 0 \quad (II.22)$$

Assumindo que:

$$r_0(x,\theta;t) = R_0 + \epsilon R_I(x,\theta;t) \quad (II.23)$$

em que  $\epsilon$  é um parâmetro muito pequeno.

Desprezando os termos de ordem superior nas equações (II.21) e (II.22) e transferindo a condição de contorno da posição atual para a posição média.

$$-\frac{\partial r_0}{\partial t} - \frac{\partial \phi_I}{\partial r} = -\frac{\partial r_0}{\partial t} + U \frac{\partial r_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_{II}}{\partial r} = 0 \text{ em } r = R_0 \quad (II.24)$$

Levando em consideração que:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial r} \frac{\partial r_0}{\partial t} = i\omega r_0 \quad (II.25)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial r} = \frac{\partial r_0}{\partial t} - \frac{\partial r_0}{\partial x} = i(\omega+u1) r_0 \quad (II.26)$$

e dividindo (II.25) por (II.26), tem-se:

$$\frac{\phi_1 r}{\phi_2 r} = \frac{\omega}{\omega+u1} \quad (II.27)$$

Como o comprimento de onda longitudinal é igual tanto no escoamento interno como no externo, pode-se escrever que  $\lambda x = 2\pi/k = 2\pi/1 \rightarrow K = 1$ .

Assim sendo (II.27) pode ser escrita na forma:

$$\frac{e^{i(\omega t - lx)\phi''} 1r(r,\theta)}{e^{i(\omega t - lx)\phi''} 2r(r,\theta)} = \frac{\omega}{\omega+u1}$$

$$\frac{\phi'' 1r(r,\theta)}{\omega} = \frac{\phi'' 2r(r,\theta)}{(\omega+U1)} \quad (II.28)$$

que corresponde à condição cinemática na superfície de vórtices.

### Condição Dinâmica

Região I

$$\frac{p_1}{\rho} + gz + \phi_{It} + \frac{1}{2} (\phi_{Ix}^2 + \phi_{Iy}^2 + \phi_{Iz}^2) = 0 \quad (\text{II.29})$$

Região II

$$\frac{p_2}{\rho} + gz + \phi_{IIIt} + \frac{1}{2} (U^2 - 2U\phi_{IIx} + \phi_{IIx}^2 + \phi_{IIy}^2 + \phi_{IIz}^2) = \frac{U^2}{2} \quad (\text{II.30})$$

Fixando somente os termos de mais alta ordem nas equações de vórtices  $p_1/\rho = p_2/\rho$ , pode-se escrever:

$$\phi_{It} = \phi_{IIIt} - U\phi_{IIx} \quad (\text{II.31})$$

Conseqüentemente a condição dinâmica na superfície de vórtices pode ser descrita como:

$$\omega\phi_1(r, \theta) = (\omega + ul)\phi_2(r, \theta) \text{ em } r = R_0$$

Em resumo, o problema de valor de contorno será contido nas equações abaixo:

$$\begin{aligned} \text{Região I} \quad \nabla^2 \phi_1(x, y, z) &= 0 \text{ na região fluída} \\ \phi'_1|_z - v_1\phi'_1 &= 0 \text{ em } z = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

$$\begin{aligned} \text{Região II} \quad \nabla^2 \phi_2(x, y, z) &= 0 \text{ na região fluída} \\ \phi'_2|_z - v_2\phi'_2 &= 0 \text{ em } z = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

$$\begin{aligned} \text{Superfície de Vórtices} \quad \omega\phi'_{2r}(r, \theta) &= (\omega + ul)\phi''_{1r}(r, \theta) \text{ em } r = R_0 \\ \omega\phi''_1(r, \theta) &= (\omega + ul)\phi''_2(r, \theta) \text{ em } r = R_0 \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

## SOLUÇÃO DO PROBLEMA E TRATAMENTO NUMÉRICO

### POTENCIAIS DE VELOCIDADE

#### Região I

O escoamento na região I será representado pelo potencial de onda incidente mais o potencial de difração (fonte, dipolo e potencial livre de onda). Ou seja:

$$\phi_1(x, y, z, t) = \phi_W(x, y, z, t) + \delta\phi_F(x, y, z, t) + \mu\phi_D(x, y, z, t) + \phi_{WF}(x, y, z, t) \quad (\text{III.1})$$

Sendo que o potencial de onda incidente é dado por:

$$\phi_W(x, y, z, t) = CH e^{v_1 z} \cos(\omega t - v_1 x \cos \alpha + v_1 y \sin \alpha) \quad (\text{III.2})$$

O potencial de fonte:

$$\phi_F(x, y, z, t) = e^{i(\omega t - kx)} \phi'_F(x, z) \quad (\text{III.3})$$

onde

$$\phi'_F(y,z) = \frac{-i e^{v_1 z - i v_1 |y| \sin \alpha}}{\sin \alpha} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-v_1 |y| \cos \alpha} \frac{\cosh u}{\cos \alpha \sinh u} \cos(v_1 z \cos \alpha \sinh u) + \sin(v_1 z \cos \alpha \sinh u) \frac{\cos \alpha \sinh u}{\cos^2 \alpha \sinh^2 u + 1} du$$

O potencial de dipolo:

$$\phi'_D(x,y,z,t) = e^{i(\omega t - kx)} \phi'_D(y,z) \quad (\text{III.4})$$

onde

$$\begin{aligned} \phi''_D(y,z) &= e^{(v_1 z - v_1 |y| \sin \alpha)} \operatorname{sgny} - \\ &- \frac{1}{\pi} \operatorname{sgny} \int_0^\infty e^{-v_1 |y| \cos \alpha} \frac{\cosh u}{\cos \alpha \sinh u} \cos(v_1 z \cos \alpha \sinh u) + \\ &+ \sin(v_1 z \cos \alpha \sinh u) \left| \frac{\cos^2 \alpha \cosh u \sinh u}{\cos^2 \alpha \sinh^2 u + 1} \right| \end{aligned}$$

Os potenciais livres de onda são descritos por:

$$\phi_{WF}(x,y,z;t) = e^{i(\omega t - kx)} \psi(y,z) \quad (\text{III.5})$$

Onde a função  $\psi(y,z)$  é determinada através da resolução da Equação de Laplace usando a técnica da transformada de Fourier.

Assim sendo os potenciais livres de onda podem ser expressos como sendo:

$$\begin{aligned} \phi_{WF}(x,y,z,t) &= \left\{ e^{i(\omega t - kx)} \right\} \left\{ \sum_p u \left[ k_{2u-1}(kr) \sin(2u-1)\theta + \right. \right. \\ &+ k_{2u+1}(kr) \sin(2u+1)\theta + 2 \frac{v_1}{k} k_{2u} \sin 2u \theta \left. \right] + \left[ \sum_\alpha u \left[ k_{2u-2}(kr) \cos(2u- \right. \right. \\ &\left. \left. - 2/\theta + k_{2u}(kr) \cos 2u\theta + \frac{2v_1}{k} k_{2u-1}(kr) \cos(2u-1)\theta \right] \right\} \quad (\text{III.6}) \end{aligned}$$

sendo  $k_u(kr)$  a função de Bessel de argumento  $kr$ .

### Região II

O escoamento na região interna é representado por um potencial composto pelo potencial de ondas transmitidas mais os potenciais livres de onda:

$$\phi_{II}(x,y,z;t) = \gamma \phi_T(x,y,z;t) + \phi_{WF}(x,y,z;t) \quad (\text{III.7})$$

O potencial de ondas transmitido é expresso por:

$$\begin{aligned} \phi_T(x,y,z;t) &= \operatorname{Re} \left\{ C_T H_T e^{i(\omega t - l_2 x} \right. \\ &\left. \pm y \sqrt{v_1^2 - k^2} \right\} \quad (\text{III.8}) \end{aligned}$$

onde  $l_2 = v_2 \cos \beta$ ,  $C_T = (\omega + ul)$  - celeridade da onda transmitida.

Potenciais livres de onda:

$$\phi_{WF}(x,y,z,t) = e^{i(\omega t - l_2 x)} \chi(y,z) \quad (\text{III.9})$$



ou

$$\begin{aligned} \phi_{WF}(x,y,z,t) = & e^{i(\omega t - lx)} \sum_0^{\infty} a_u I_{2u-1}(lr) \sin(2u-1)\theta + \\ & + I_{2u+1}(lr) \sin(2u+1)\theta - \frac{2v^2}{l} I_{2u}(u' \sin 2u\theta) + \sum_0^{\infty} b_u I_{2u-2}(lr) \\ & \cos(2u-2)\theta + \frac{1}{2}(lr) \cos 2u\theta - \frac{2v^2}{l} I_{2u-1}(lr) \cos(2u-1)\theta \quad (\text{III.10}) \end{aligned}$$

### O ângulo $\beta$

O ângulo  $\beta$  é o ângulo pelo qual as ondas transmitidas se propagam na região interna à corrente. Este ângulo é determinado utilizando-se a propriedade segundo a qual o comprimento de onda longitudinal (comprimento na direção  $x$ ) é o mesmo tanto na região interna como na externa:  $\lambda_x = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{l}$ .

Considerando os valores de  $k$  e  $l$  podemos determinar o valor de  $\beta$  através da relação:

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \left(1 + \frac{U_1}{\omega}\right)^2 \quad (\text{III.11})$$

### TRATAMENTO NUMÉRICO

Na determinação dos coeficientes ( $\delta, \mu, p_u, q_u, a_u, b_u$ ) que expressam as intensidades dos potenciais usou-se as condições impostas na superfície de vórtices (cinemática e dinâmica somando-as e fazendo uma distribuição sistemática da equação resultante em um certo número de pontos da superfície de vórtices onde ela deve valer. Para isso dividiu-se a coordenada em um número de vezes igual ao número de incógnitas presentes.

A equação representativa do sistema algébrico a ser resolvido, resultante da soma anteriormente citada, foi:

$$\begin{aligned} & \sigma \left[ \omega \phi_F(r, \theta) + (\omega + U_1) \phi_{F_r}(r, \theta) \right] + \left[ \omega \phi'_D(r, \theta) + (\omega + U_1) \phi'_{D_r}(r, \theta) \right] + \\ & + \sum_1^n p_n \left[ \omega \psi_n^o(r, \theta) + (\omega + U_1) \psi_{r_n}^o(r, \theta) \right] + \sum_1^{\infty} q_n \left[ \omega \psi_n^1(r, \theta) + (\omega + U_1) \psi_{r_n}^e(r, \theta) \right] - \\ & - \gamma \left[ (\omega + U_1) \phi_T(r, \theta) + \omega \phi_{T_r}(r, \theta) \right] - \sum_1^n a_n \left[ (\omega + U_1) \chi_n^o(r, \theta) + \omega \chi_{r_n}^o(r, \theta) \right] - \\ & - \sum_1^{\infty} b_n \left[ (\omega + U_1) \chi_n^e(r, \theta) + \omega \chi_{r_n}^e(r, \theta) \right] = -\omega \phi_w(r, \theta) - (\omega + U_1) \phi_{w_r}(r, \theta) \quad (\text{III.12}) \end{aligned}$$

As integrais dos potenciais de fonte e dipolo foram resolvidas utilizando-se a Regra de Simpson.

As derivadas dos potenciais livres de ondas foram calculadas através das Fórmulas de Recorrência das funções de Bessel.

Implantado o processo numérico num computador digital Bourroughs 6700 determinou-se as intensidades dos potenciais e conseqüentemente a forma da superfície livre nas regiões I e II considerando que esta era função da velocidade.

### DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A solução do sistema algébrico (equação III.12) torna-se laboriosa uma vez que o mesmo é um sistema complexo ( $a+ib$ ) composto por funções modificadas K e I de Bessel e suas derivadas.

A escolha do número de termos a ser utilizado na descrição dos potenciais livres de onda foi de suma importância na resolução algébrica, assim como a escolha do argumento das funções K e I de Bessel, tendo em vista que na solução do sistema multiplicaríamos termos cujos expoentes teriam valores bastante grandes e termos cujos expoentes teriam valores bastante pequenos, ficando ora com resultados altíssimos, ora com resultados ínfimos provenientes desta multiplicação, recaindo assim numa matriz mal condicionada uma vez que em um dos objetivos do trabalho foi calcular a forma da superfície livre, variando portanto o raio da corrente, e tendo em vista que o argumento das funções de Bessel era proporcional à razão raio da corrente-comprimento de onda ( $r/\lambda$ ) o problema tornou-se de mais difícil solução.

Para contornar esta dificuldade estudou-se diversos casos onde foram atribuídos diferentes valores ao comprimento de onda, ao ângulo da incidência, à velocidade da corrente, ao raio da corrente e constatou-se uma acentuada atenuação da onda incidente ao encontrar a superfície de vórtices.

A figura II mostra a forma da superfície livre na região I ( $\zeta_I$ ) e na região II ( $\zeta_{II}$ ) onde pode-se verificar a marcante atenuação da onda ao encontrar a superfície de vórtices.

As figuras III, IV, V, VI mostram a contribuição de cada superfície, isoladamente, ou seja, a contribuição das superfícies devido ao potencial de onda incidente, ao potencial de fonte, ao potencial de dipolo e aos potenciais livres de onda. Ao examinarmos os valores destas contribuições e compará-los com os da superfície livre na região I concluímos que a forma da superfície livre na região I, junto à superfície de vórtices se deve predominantemente aos efeitos do potencial de onda livre e, a medida que se distancia desta superfície de vórtices a forma da superfície livre sofre predominância dos efeitos do potencial de onda incidente.

Os dados testados foram inúmeros, entretanto, nas figuras acima citadas, foram utilizados os seguintes dados:  $r=10$ ,  $U=0,2$  e

$\alpha=60^\circ$  (onde  $r$  = raio da corrente,  $U$  = velocidade da corrente e  $\alpha$  = ângulo de incidência).

As figuras VII e VIII mostram as contribuições das superfícies devido ao potencial de ondas transmitidas e devido aos potenciais livres de onda (região II).

Os resultados obtidos estão coerentes com aqueles experimentalmente observados por Savitsky (1970) através de testes em tanques de prova.

#### REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, Maud Stejun, In: A. Handbook of Mathematical Functions. New York, Dover Publications Inc., 1964; 1046 pp.
- GADD, Viscous Effects on Ship Stern Waves. NPL SHIP Report 132, 1969.
- HIRATA, H.M. Sobre a Propagação de Ondas de Superfície através de Es- teira de Navio. II Simpósio Nacional de Engenharia Mecânica, novembro, 1973.
- KOCHIN, N.E., KIBEL, I.A. e ROZE, N.V. Theoretical Hydromechanics. John Wiley and Sons, Inc. Interscience Publishers, 1964.
- LAMB, H. Hydrodynamics. New York, Dover Publications Inc., 1932, 738 pp.
- MARUO, H. Notas Sobre Incidência de Ondas de Navios Delgados. 2ª Comissão de Tanques de Prova do Japão, 1972.
- SAVITSKY, D. Introduction Between Gravity Waves and Finite Turbulent Flow Fields. 8th on Naval Hydrodynamics Pasadena, 1970.
- STOKER, J.J. Water Waves. New York Interscience Publisher Inc., 1957, 567 pp.
- VAN DYKE, M. Perturbation Methods in Fluid Mechanics. New York, Academic Press Inc., 1964.
- WASHINGTON, D.C. Estudo do Escoamento Devido à Propagação de Ondas Progressivas em Presença de Uma Corrente Uniforme. Tese de Mestrado, Brasil. COPPE/UFRJ, 1980.

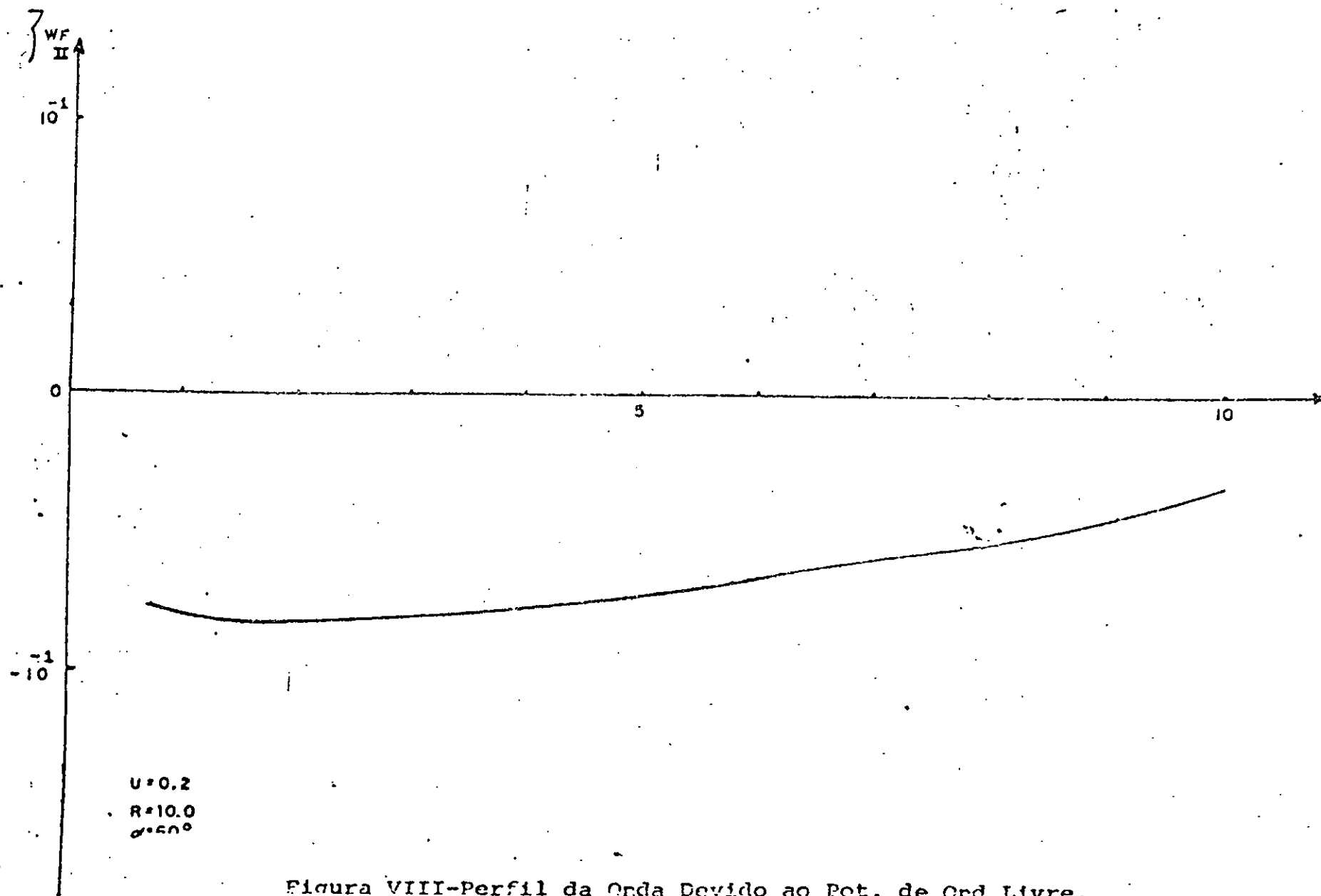


Figura VIII-Perfil da Onda Devido ao Pot. de Ond Livre.

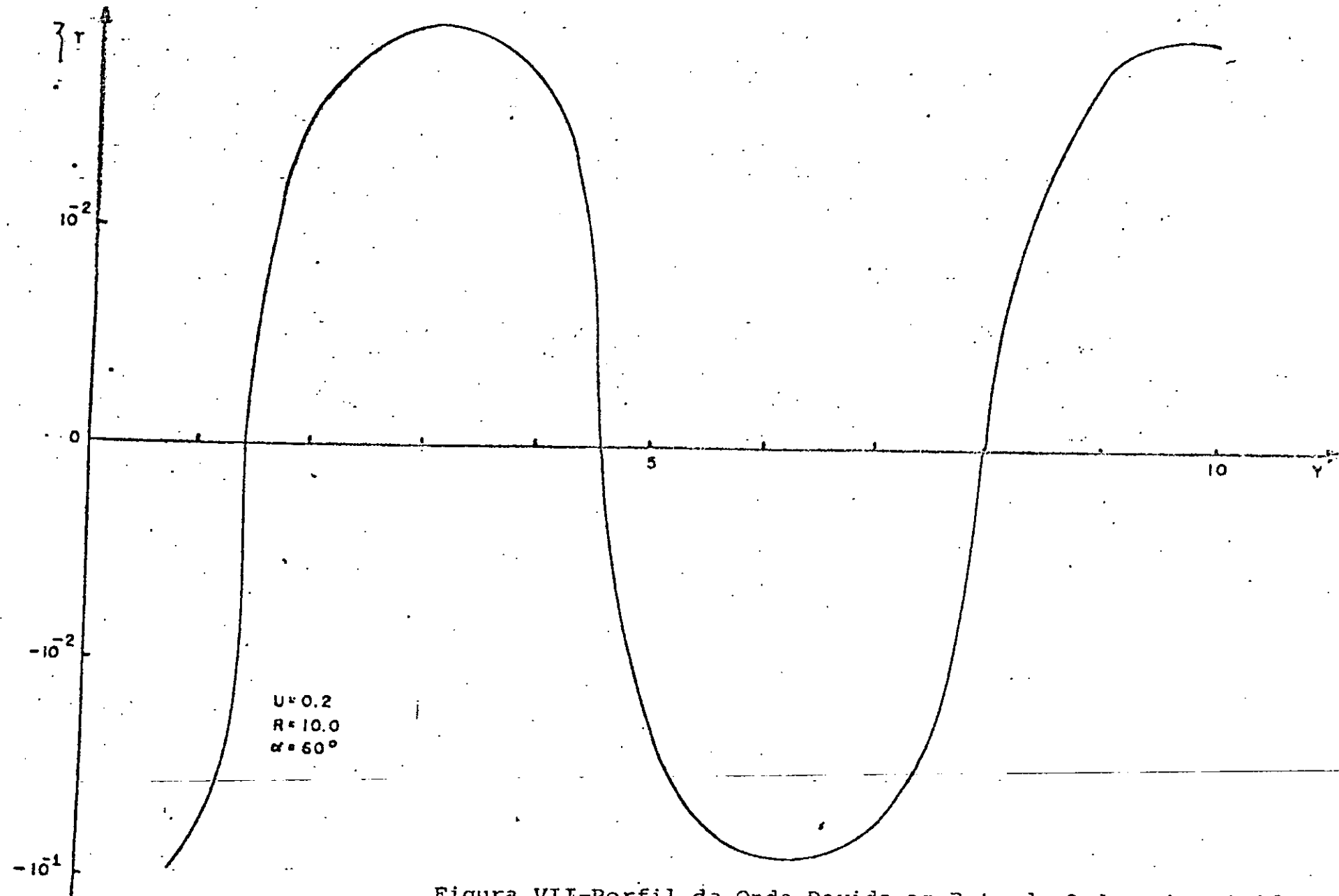


Figura VII-Perfil da Onda Devido ao Pot. de Onda Transmítidas.

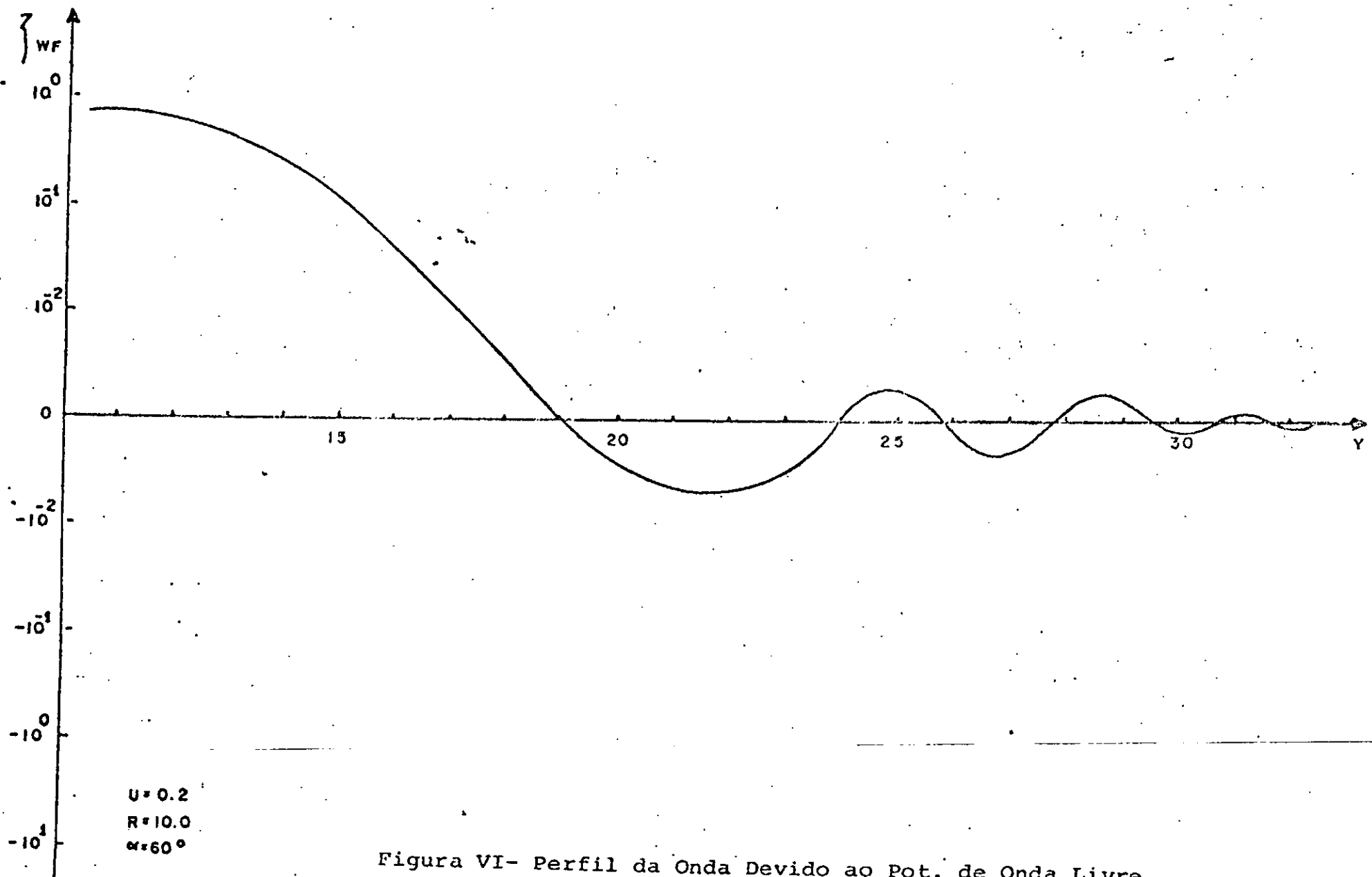


Figura VI- Perfil da Onda Devido ao Pot. de Onda Livre.

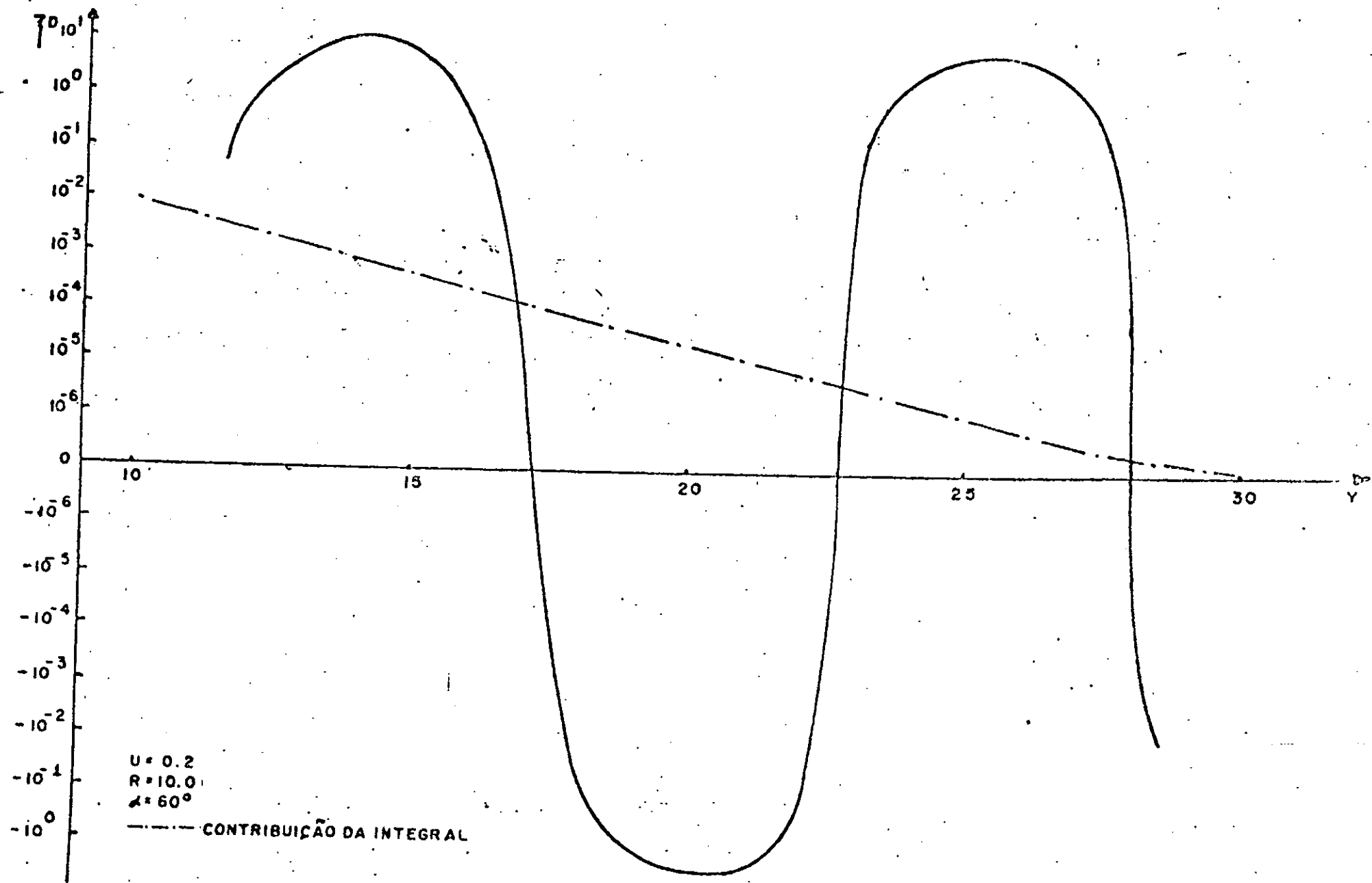


Figura V -Perfil da Onda Devido ao Pot. de Dipolo.

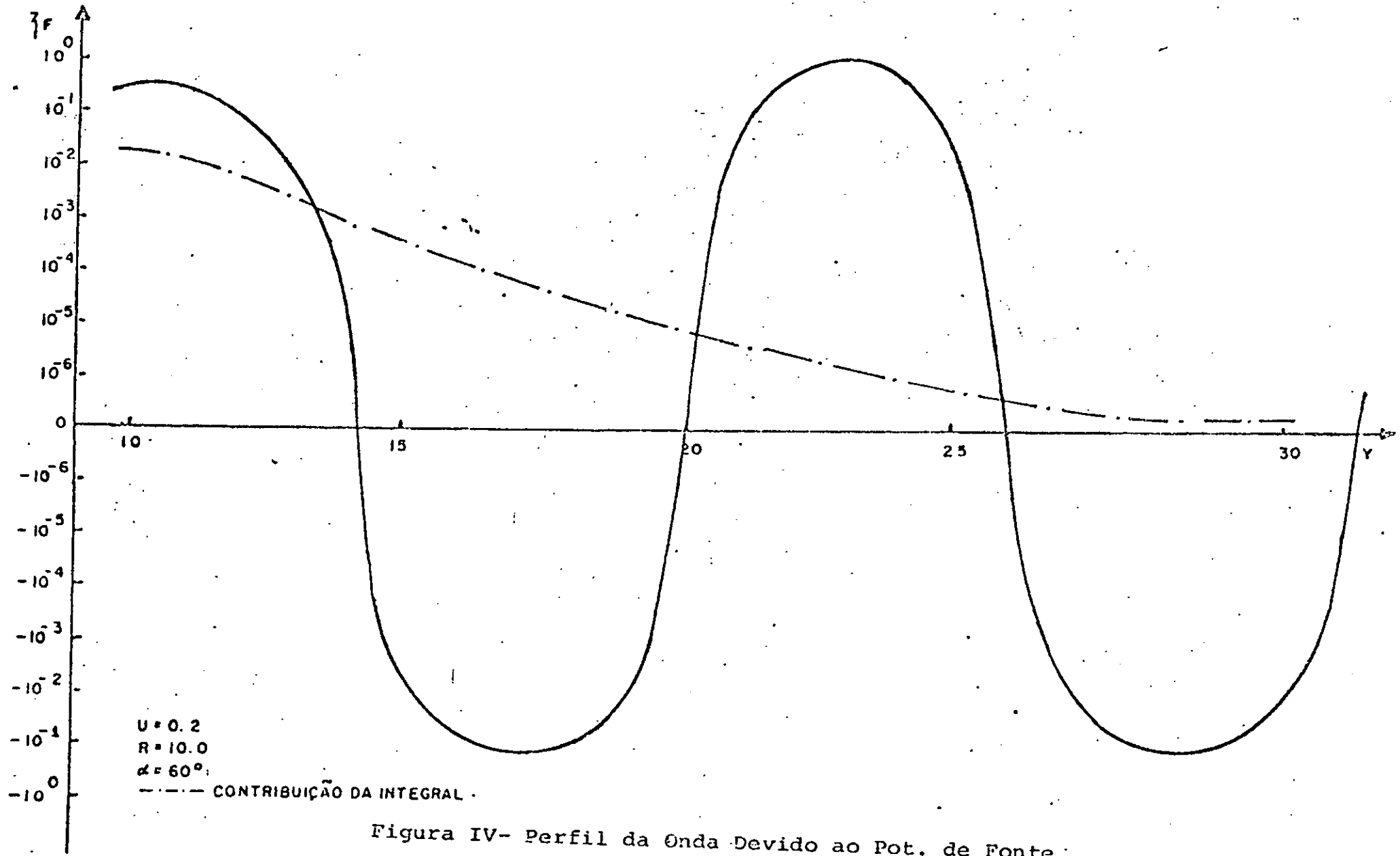


Figura IV- Perfil da Onda Devido ao Pot. de Fonte.



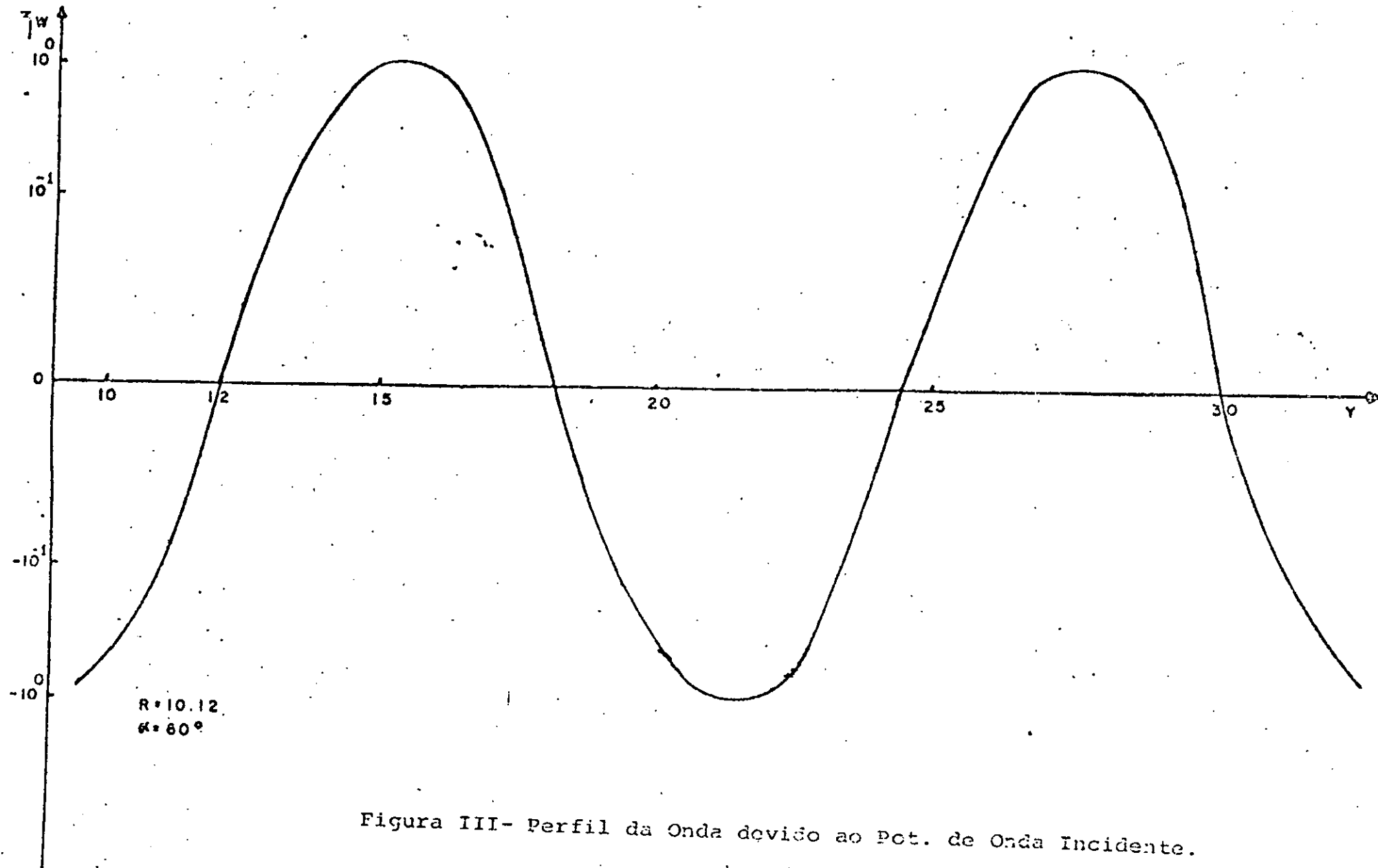


Figura III- Perfil da Onda devido ao Pot. de Onda Incidente.

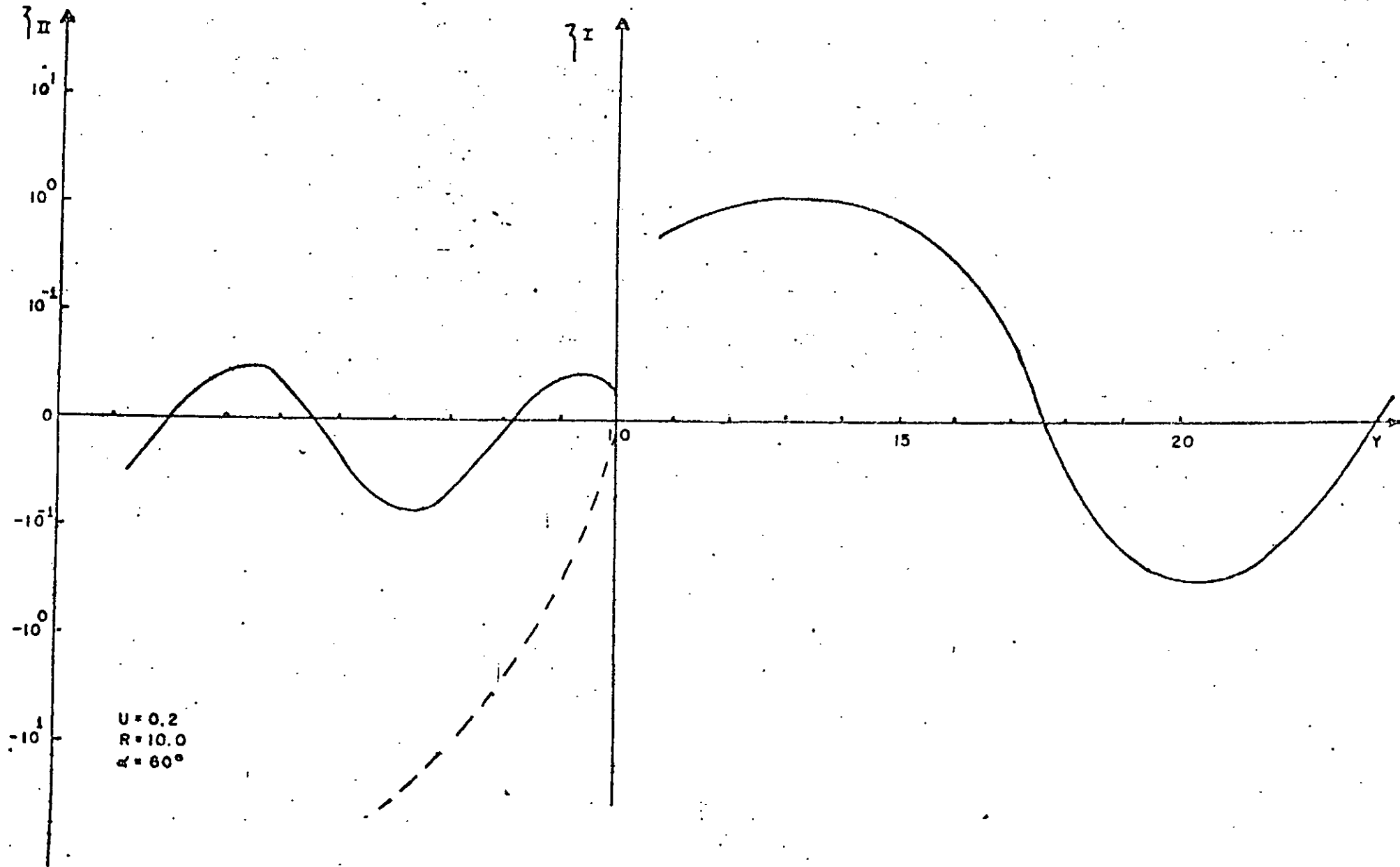


Figura II - Perfil da Onda nas Regiões I e II.

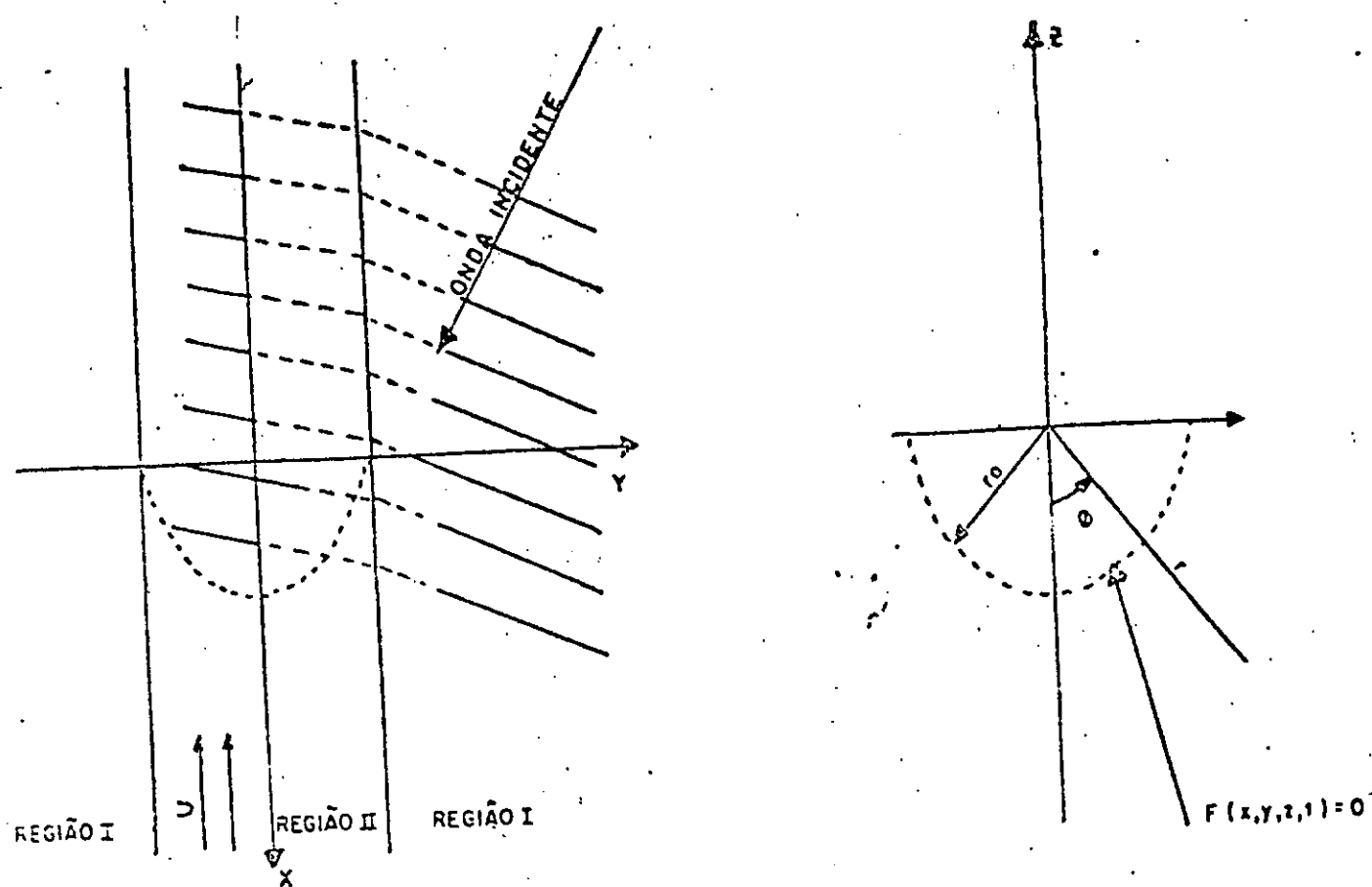


Figura I - Sistema de Coordenadas.